

CONTRÔLE CONTINU – Avril 2003
Durée de l'épreuve : 2h00

Lisez attentivement les questions !

EXERCICE 1 :

Population au 1/1/1998	273.132.570
Population au 1/1/1999	276.334.433
Naissances vivantes en 1998	3.941.553
Décès en 1998	2.336.845

!" ##\$

% " & ' () * + , - . / , 0 1 2 , 3 ##\$

Âge révolu	Population au 1/1/1998
0	3.924.652
1	3.910.019
2	3.933.716
3	3.965.312
4	3.910.020

Génération	Âge	Décès
1998	0	23.466
1997	0	5.866
1997	1	873
1996	1	819
1996	2	764
1995	2	710
1995	3	655
1994	3	601
1994	4	546
1993	4	491

4 5 , " ' ##\$ ##4
6 6 ### 3
7 " , -

8 5 , 7 9 : ##\$ % " , -

EXERCICE 2 :

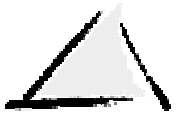
% 5 , ' 1
%% " 7 ' , ; < ' ,
% : 5 , 1 9 %= := 8= := 8= " , -
% . 5 , 9 " , -
% 4 5 , 7 " , -
% 8 " ' !" ##\$

NOM – Prénom : >

(* ! " ## \$

Âge x	S_x	$D_{(x,x+a)}$	${}_a q_x$ en ‰			
0	100.000					
		7,46			
1	99.254					
		1,38			
5	99.117					
		0,89			
10	99.030					
		459	4,64			
20	98.570					
		947	9,61			
30	97.623					
		1.396	14,30			
40					
		28,32			
50					
		62,59			
60	87.650					
		13.181	150,38			
70	74.469					
		23.456			
80	51.012					
		32.028			
90	18.985					
				
.....						

) ? + ,



CONTRÔLE CONTINU – Avril 2003
Éléments de Correction

EXERCICE 1 :

1.1) $P_{1/1/99} = P_{1/1/98} + N - D + SM$

→ $SM = P_{1/1/99} - P_{1/1/98} - N + D = 276.334.433 - 273.132.570 - 3.941.553 + 2.336.845 = + 1.597.155$

En 1998, aux USA, le solde migratoire est positif et s'élève à + 1.597.155.

0,75 point (0,25 pour la formule, 0,25 pour l'application numérique et 0,25 pour la phrase de commentaire)

1.2) $P_{1/7/98} = (P_{1/1/98} + P_{1/1/99}) / 2 = (273.132.570 + 276.334.433) / 2 = 274.733.502$

0,5 point (0,25 pour la formule, 0,25 pour l'application numérique)

$TBM = D_{1998} / P_{1/7/98} = 2.336.845 / 274.733.502 = 0,00850 = 8,5 \text{ ‰}$

0,75 point (0,25 pour la formule, 0,25 pour l'application numérique et 0,25 pour la phrase de commentaire)

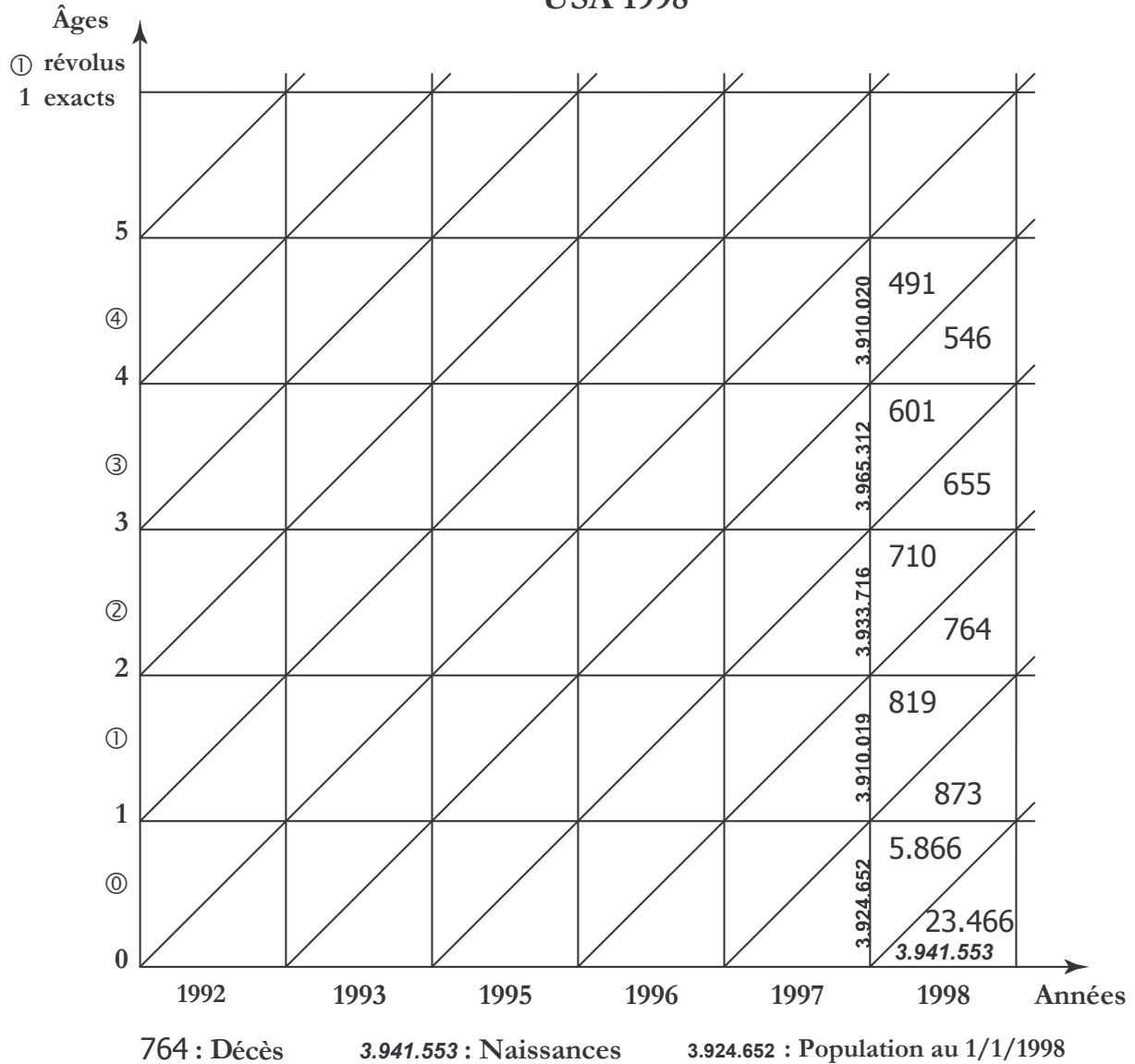
$TBN = N_{1998} / P_{1/7/98} = 3.941.553 / 274.733.502 = 0,01434 = 14,3 \text{ ‰}$

0,75 point (0,25 pour la formule, 0,25 pour l'application numérique et 0,25 pour la phrase de commentaire)

En 1998, aux USA, pour 1.000 personnes vivantes, on a enregistré 8,5 décès et 14,3 naissances.

1.3)

Décès selon l'âge et la génération USA 1998



0,5 point pour la série des décès, 0,5 pour les effectifs au 1^{er} janvier 1998, 0,75 point pour les axes, titres et légendes et 0,25 pour les naissances en 1998.

$$1.4) \quad P_{1/1/99}^{G98} = N_{1998} - D_{1998}^{G98} = 3.941.553 - 23.466 = 3.918.087$$

0,75 point (0,25 pour la formule, 0,25 pour l'application numérique et 0,25 pour la phrase de commentaire)

$$P_{1/1/99}^{G95} = P_{1/1/98}^{G95} - D_{1998}^{G95} = 3.933.716 - (710 + 655) = 3.932.351$$

0,75 point (0,25 pour la formule, 0,25 pour l'application numérique et 0,25 pour la phrase de commentaire)

Au 1^{er} janvier 1999, aux USA, en supposant qu'il n'y a pas de migrations avant l'âge de 5 ans, il y avait 3.918.087 personnes vivantes nées en 1998 et 3.932.351 nées en 1995.

$$1.5) \quad P_{1/7/98}^{3\text{ans révolus}} = \frac{P_{1/1/98}^{3\text{ans révolus}} + P_{1/1/99}^{3\text{ans révolus}}}{2} = \frac{3.965.312 + 3.932.351}{2} = 3.948.832$$

0,5 point (0,25 pour la formule, 0,25 pour l'application numérique)

$$TMA_{1998}^{3\text{ans révolus}} = \frac{D_{1998}^{3\text{ans révolus}}}{P_{1/7/98}^{3\text{ans révolus}}} = \frac{601 + 655}{3.948.832} = 0,00032 = 32\text{‰}$$

Aux USA, en 1998, pour 1.000 (100.000) personnes âgées de 3 ans révolus, 0,32 (32) sont décédées.
0,75 point (0,25 pour la formule, 0,25 pour l'application numérique et 0,25 pour la phrase de commentaire)

EXERCICE 2 :

2.1) $D_{x,x+a} = S_x * {}_a q_x$
 Ainsi, $D_{0,1} = S_0 * {}_1 q_0 = 100.000 * 7,46 / 1.000 = 746$
 0,5 pour la formule

$S_{x+a} = S_x - S_{x,x+a}$
 Ainsi, $S_{40} = S_{30} - D_{30,40} = 97.623 - 1.396 = 96.227$
 0,5 pour la formule

${}_a q_x = D_{x,x+a} / S_x$
 Ainsi, ${}_{10} q_{70} = D_{70,80} / S_{70} = 23.456 / 74.469 = 0,31619 = 316,19 \text{ ‰}$
 0,5 pour la formule

Âge x	S_x	$D_{(x,x+a)}$	${}_a q_x$ en ‰
0	100.000	746	7,46
1	99.254	137	1,38
5	99.117	88	0,89
10	99.030	459	4,64
20	98.570	947	9,61
30	97.623	1.396	14,30
40	96.227	2.725	28,32
50	93.502	5.852	62,59
60	87.650	13.181	150,38
70	74.469	23.456	316,19
80	51.012	32.028	627,85
90	18.985	18.985	1.000,00
105	0		

Le risque de décéder après 90 ans, ayant atteint 90 ans, est total. Le dernier quotient est donc égal à $1 = 1.000 \text{ ‰}$.
 0,5 pour la formule et l'application à a dernière ligne du tableau

2.2) 19% des personnes ont atteint l'âge de 90 ans. De plus, nous savons que les USA sont un pays développés avec une mortalité faible. Nous pouvons donc considérer que ces personnes décèdent en moyenne à 97,5 ans et fermer la table à 105 ans.
 0,5 point

2.3) ${}_{20} p_0 = S_{20} / S_0 = 98.570 / 100.000 = 0,9857 = 985,7 \text{ ‰} = 98,6 \text{ ‰}$
 0,75 point (0,25 pour la formule, 0,25 pour l'application numérique et 0,25 pour la phrase de commentaire)

${}_{30} p_{60} = S_{90} / S_{60} = 18.985 / 87.650 = 0,2166 = 216,6 \text{ ‰} = 21,7 \text{ ‰}$
 0,75 point (0,25 pour la formule, 0,25 pour l'application numérique et 0,25 pour la phrase de commentaire)

${}_{30} q_{60} = 1 - {}_{30} p_{60} = 1 - 0,2166 = 0,7834 = 783,4 \text{ ‰} = 78,3 \text{ ‰}$
 0,75 point (0,25 pour la formule, 0,25 pour l'application numérique et 0,25 pour la phrase de commentaire)

Si les conditions de mortalité observées en 1998 aux USA restent identiques année après année, alors les personnes nées en 1998 auront presque 99 chances sur 100 d'atteindre leur vingtième anniversaire. Sur 100 personnes qui atteindront 60 ans, 22 vivront au moins jusqu'à 90 ans, les 78 autres décédant avant cet âge.

2.4) Nous faisons pour les deux questions suivantes l'hypothèse de linéarité (les décès se répartissent de manière uniforme dans chaque classe d'âge).

$$e_0 = \frac{\sum \text{Centres de classe} \times \text{décès de la classe d'âges}}{S_0}$$

$$e_0 = \frac{0,5d_{0,1} + 3d_{1,5} + 7,5d_{5,10} + 15d_{10,20} + 25d_{20,30} + \dots + 85d_{80,90} + 97,5d_{90,105}}{S_0} = 77,15 \text{ ans}$$

En fermant à 95 ans, e_0 vaut

95 ans	76,20
100	76,67
105	77,15
110	77,62

Si les conditions de mortalité observées en 1998 aux USA restent identiques année après année, alors les américains nés en 1998 décèderont en moyenne à 77,15 ans.

1,5 point (0,5 pour la formule, 0,5 pour l'application numérique et 0,5 pour la phrase de commentaire)

2.5) 50.000 est compris entre S_{80} et S_{90} . L'âge médian (Med) est donc compris entre 80 et 90 ans.

$$\text{Med} = 80 + (90 - 80) \frac{S_{80} - 50.000}{S_{80} - S_{90}} = 80 + 10 \frac{51.012 - 50.000}{51.012 - 18.985} = 80,31 \text{ ans}$$

Si les conditions de mortalité observées en 1998 aux USA restent identiques année après année, alors la moitié des personnes nées en 1998 décèderont avant 80,3 ans, et l'autre moitié après cet âge.

1,5 point (0,5 pour la formule, 0,5 pour l'application numérique et 0,5 pour la phrase de commentaire)

2.6) 3 points



!

CONTROLE CONTINU (2 HEURES)

Exercice A Mouvement de la population

On dispose des mouvements de la population dans un pays Africain.

Années x	Population au 01/01/x	Naissances x	Décès x	Immigrations x	Emigrations x
1992	30880000	555840	432320	115235	113691
1993	31005064	449573	-----	105987	115289
1994	30980260	340783	681566	98701	284583
1995	-----	395897	548165	99586	148312
1996	30252602	423536	393284	-----	123634
1997	30260467				

- A.1) Compléter les données manquantes dans le tableau : Calculer l'effectif de la population au 01/01/1995, le nombre de décès de l'année 1993 et le nombres d'immigrants de l'année 1996.
- A.2) Calculer le taux brut de natalité pour chaque année.
- A.3) Calculer le taux brut de mortalité pour chaque année.
- A.4) Calculer le taux net de migration pour chaque année.
- A.5) Commenter l'évolution de la population entre le 01 janvier 1992 et le 31 décembre 1996..

Exercice B Table de mortalité

On dispose de la table de mortalité de la génération 1999 dans un pays A.

Pays A

Agés exacts x	S _x	D _(x,x+4)	aq _x ‰
0	100000	1311	13.11
5	98689	-----	0.92
10	98598	307	-----
20	98291	618	6.29
30	97673	858	8.78
40	96815	2001	20.67
50	94814	-----	56.20
60	89485	13503	150.90
70	75982	29828	392.57
80	46154	37059	802.94
90	9095	9095	-----
100	0		

- B.1) Calculer les décès manquants de la table de mortalité pour la génération 1999
- B.2) Calculer les quotients de mortalité manquants de la table de mortalité pour la génération 1999
- B.3) Calculer l'espérance de vie à la naissance de la génération 1999.
- B.4) Calculer la probabilité de survie a 10 ans.
- B.5) Calculer ${}_{30}P_{20}$ et donner sa signification.

On dispose par ailleurs de la table de mortalité de la génération 1999 pour un pays B

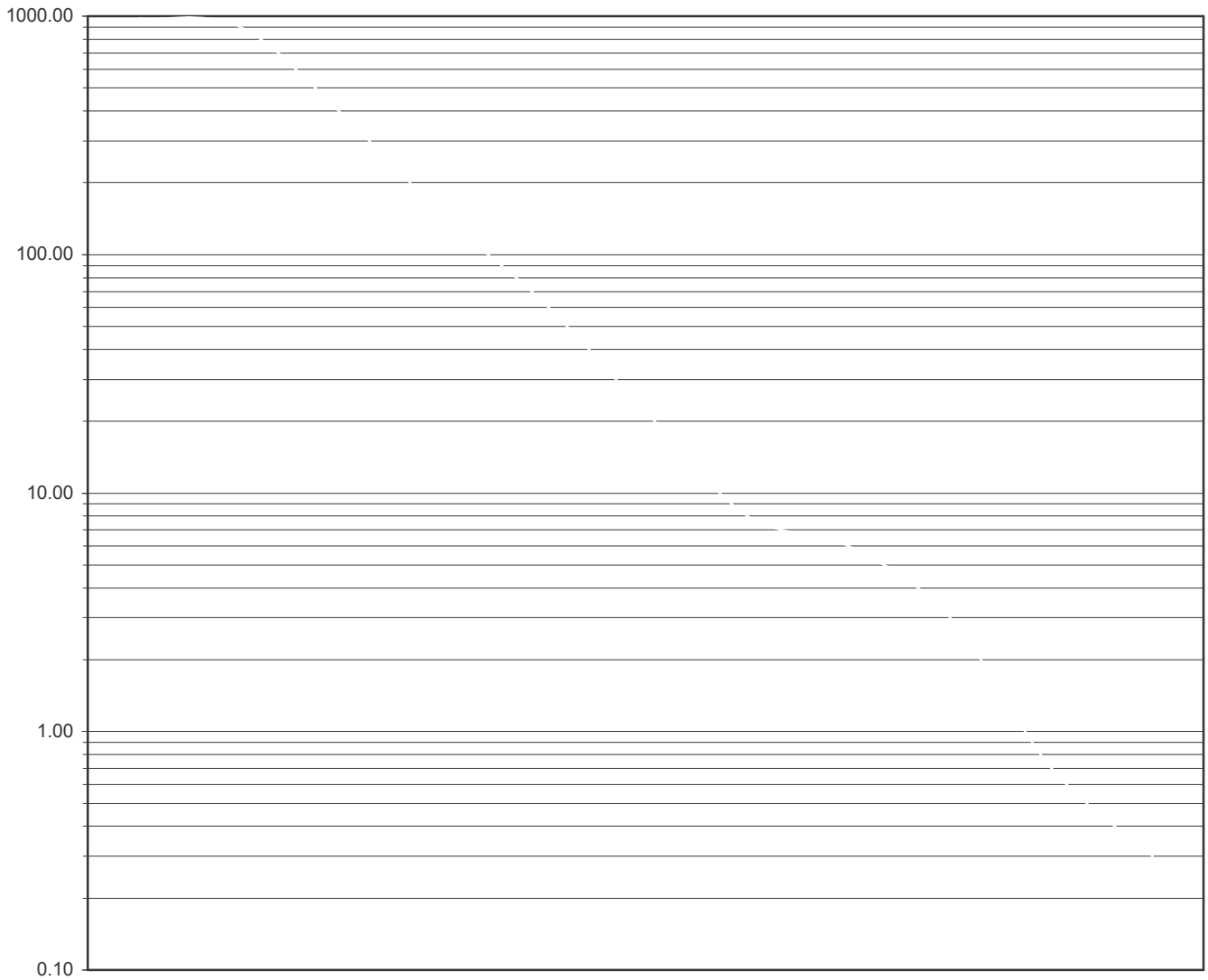
Pays B

Ages exacts x	S_x	$D(x,x+4)$	aq_x ‰
0	100000	12634	126.34
5	87366	1214	13.90
10	86152	2244	26.05
20	83908	3858	45.98
30	80050	4455	55.65
40	75595	6238	82.52
50	69357	10233	147.54
60	59124	17443	295.02
70	41681	23832	571.77
80	17849	15637	876.07
90	2212	2212	1000.00
100	0		

- B.6) Calculer l'espérance de vie à la naissance de la génération 1999 pour le pays B.
- B.7) Calculer la probabilité de survie a 10 ans dans le pays B.
- B.8) Calculer ${}_{30}Q_{20}$ dans le pays B.
- B.9) Sur un graphique semi-logarithmique tracer deux courbes avec les quotients de mortalité des deux pays. A partir de ce graphique et de tous ce qui a été calculé précédemment, commenter la mortalité de chaque pays et comparer les entre eux.

Graphique Semi-logarithmique

Titre : _____





CONTROLE CONTINU (2 HEURES)

Éléments de correction

Exercice A Mouvement de la population (13 pts)

On dispose des mouvements de la population dans un pays Africain.

Années x	Pop au 01/01/x	Naissances x	Décès x	Immigrations x	Emigrations x	TBN ‰	TBM ‰	TNM ‰
1992	30880000	555840	432320	115235	113691	17.96	13.97	0.05
1993	31005064	449573	465076	105987	115289	14.51	15.01	-0.30
1994	30980260	340783	681566	98701	284583	11.09	22.19	-6.05
1995	30453596	395897	548165	99586	148312	13.04	18.06	-1.61
1996	30252602	423536	393284	101247	123634	14.00	13.00	-0.74
1997	30260467							

- A.1) $Pop\ 1/1/1995 = pop\ 1/1/1994 + N94 - D94 + I94 - E94$ 1 pts
 Décès 1993 = $Pop\ 1/1/93 + N93 + I93 - E93 - Pop\ 1/1/94$ 1 pts
 Immigrants 1996 = $Pop\ 1/1/96 + N96 - D96 - E96 - Pop\ 1/1/97$ 1 pts

- A.2) $TBN_x = N_x / [(Pop\ 1/1/x + Pop\ 1/1/x+1) / 2]$ 1,25 pts
 $TBM_x = D_x / [(Pop\ 1/1/x + Pop\ 1/1/x+1) / 2]$ 1,25 pts

A.3) Avantage d'un taux brut : Les taux bruts permettent une première comparaison, ici entre plusieurs années, en éliminant l'effet que pourrait jouer les différences de taille des différentes populations en comparaison.

Inconvénients d'un taux brut : Un taux brut est fonction non seulement de l'événement étudié, ici la natalité et la mortalité, mais est aussi fonction de la différence de structure par âges. 1 pts

Evolution des taux bruts de natalité et de mortalité : 2 pts

- Les taux bruts de natalité diminuent fortement entre 1992 et 1994 (de 17,96 à 11,09) et augmentent ensuite jusqu'en 1996.
- Les taux bruts de mortalité eux varient à l'inverse : ils augmentent fortement de 1992 à 1994 (de 13,97 à 22,19) et diminuent ensuite jusqu'en 1996.
- Le taux de mortalité en 1996 a retrouvé à le niveau qu'il avait en 1992, il est même inférieur (13 ‰ contre 13,97 ‰ en 1992). Par contre le niveau de la natalité n'a pas atteint en 1996 le niveau qu'il avait en 1992 (14 ‰ contre 17,96 ‰ en 1992).
- Il semble qu'il se soit passé quelque chose en 1993 et plus fortement en 1994. On pourrait penser à une guerre qui fait augmenter fortement la mortalité et diminuer la fécondité du fait que les hommes sont à la guerre, ou décédés.

- A.4) $TNM_x = (I_x - E_x) / [(Pop\ 1/1/x + Pop\ 1/1/x+1) / 2]$ 1,5 pts

On constate que le flux migratoire diminue fortement entre 1992 et 1994 (de +0,05 à -6,05) et augmente ensuite pour atteindre un taux de - 0,74. Les variations du taux de migration sont sur la même période que les variations des taux de natalité et de mortalité que nous avons constaté précédemment.

Ces variations du taux net de migration, accentuent l'idée d'une guerre dans ce pays, en 1993 et 1994, avec de nombreux départs de population qui peuvent faire penser à une fuite. 3 pts

Exercice B**Table de mortalité (17 pts)**

Pays A

Ages exacts x	S _x	D _(x,x+4)	^a q _x ‰	e _x
0	100000	1311	13.11	75.66
5	98689	91	0.92	71.63
10	98598	307	3.11	66.70
20	98291	618	6.29	56.89
30	97673	858	8.78	47.22
40	96815	2001	20.67	37.59
50	94814	5329	56.20	28.28
60	89485	13503	150.90	19.67
70	75982	29828	392.57	12.27
80	46154	37059	802.94	6.97
90	9095	9095	1000.00	5.00
100	0			

$$B.1) D_{(5,10)} = S_5 * {}_5q_5 = 98689 * 0,00092 = 91 \quad 0,75 \text{ pts}$$

$$D_{(50,60)} = S_{50} * {}_{10}q_{50} = 94814 * 0,0562 = 5329 \quad 0,75 \text{ pts}$$

$$B.2) {}_{10}q_{10} = D_{(10,20)} / S_{10} = 307 / 98598 = 0,00311 \quad 0,75 \text{ pts}$$

$${}_{10}q_{90} = D_{(90,100)} / S_{90} = 9095 / 9095 = 1 \quad \text{Tout le monde meurent.} \quad 0,75 \text{ pts}$$

$$B.3) e_0 = \frac{[(2,5 * D_{(0,5)}) + (7,5 * D_{(5,10)}) + (15 * D_{(10,20)}) + (25 * D_{(20,30)}) + (35 * D_{(30,40)}) + (45 * D_{(40,50)}) + (55 * D_{(50,60)}) + (65 * D_{(60,70)}) + (75 * D_{(70,80)}) + (85 * D_{(80,90)}) + (95 * D_{(90,100)})]}{S_0}$$

$$e_0 = (2,5*1311 + 7,5*91 + 15*307 + 25*618 + 35*858 + 45*2001 + 55*5329 + 65*13503 + 75*29828 + 85*37059 + 95*9095) / 100000$$

$$e_0 = 75,66 \text{ ans} \quad 2 \text{ pts}$$

$$B.4) {}_{10}P_0 = S_{10} / S_0 * 100 = 98598 / 100000 * 100 = 98,60 \% \quad 1 \text{ pts}$$

$$B.5) {}_{30}P_{20} = S_{50} / S_{20} * 100 = 94814 / 98291 * 100 = 96,46 \% \quad 1 \text{ pts}$$

Les personnes de la génération 1999 du pays A qui ont survécus jusqu'à 20 ans ont 96,46 % de chances de survivre jusqu'à 50 ans. 0,5 pts

Pays B

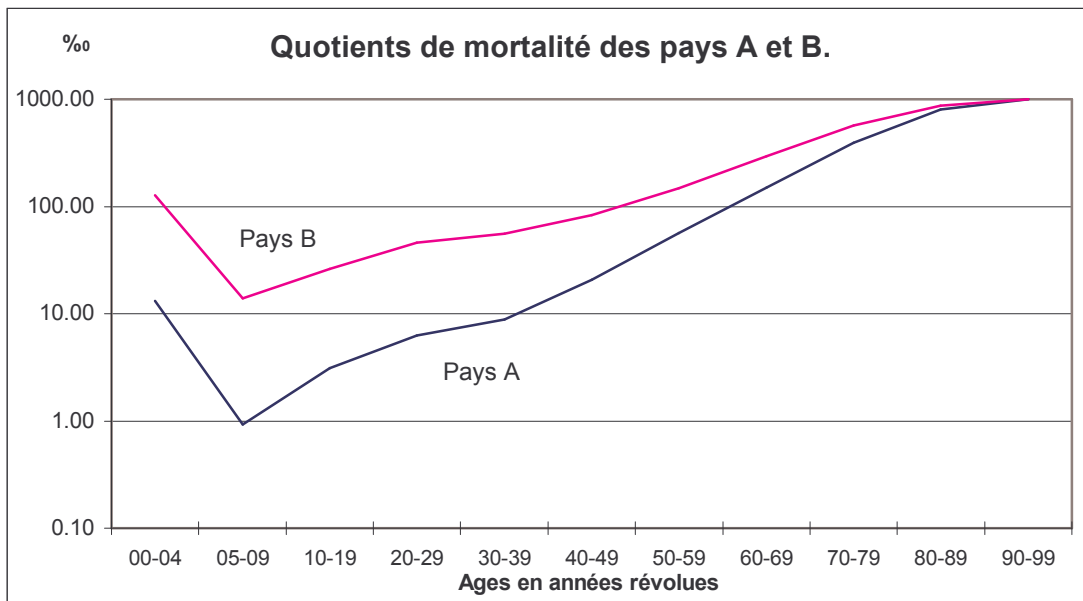
Ages exacts x	S _x	D _(x,x+4)	^a q _x ‰	e _x
0	100000	12634	126.34	56.31
5	87366	1214	13.90	59.09
10	86152	2244	26.05	54.89
20	83908	3858	45.98	46.22
30	80050	4455	55.65	38.21
40	75595	6238	82.52	30.16
50	69357	10233	147.54	22.43
60	59124	17443	295.02	15.44
70	41681	23832	571.77	9.81
80	17849	15637	876.07	6.24

90	2212	2212	1000.00	5.00
100	0			

$$\begin{aligned}
 \text{B.6) } e_{60} &= \left\{ \left[(65 * D(60,70)) + (75 * D(70,80)) + (85 * D(80,90)) + (95 * D(90,100)) \right] / S_{60} \right\} - 60 \\
 &= \left\{ \left[65 * 1744 + 75 * 23832 + 85 * 15637 + 95 * 2212 \right] / 100000 \right\} - 60 \\
 &= 56,31 \text{ ans} \qquad \qquad \qquad 2 \text{ pts}
 \end{aligned}$$

$$\text{B.7) } {}_{10}P_0 = S_{10} / S_0 * 100 = 86152 / 100000 * 100 = 86,15 \% \qquad \qquad \qquad 1 \text{ pts}$$

$$\begin{aligned}
 \text{B.8) } {}_{30}Q_{20} &= (S_{20} - S_{50}) / S_{20} * 100 = (83908 - 69357) / 83908 * 100 = 17,34 \% \\
 \text{ou} &= 1 - (S_{50} / S_{20}) * 100 = 1 - (69357 / 83908) * 100 = 17,34 \% \qquad \qquad \qquad 1,5 \text{ pts}
 \end{aligned}$$



1 pts

B.9) Intérêt de l'échelle logarithmique = Cela permet de mettre sur un même graphique des valeurs très éparpillées, allant comme ici entre 0,92 et 1000. Cette échelle permet de voir les variations entre les quotients notamment les premiers qui varient de 0,92 à 126,34 %0 et qui n'apparaîtraient que très faiblement avec une échelle normale, à moins de faire un graphique « immense ».

1 pts

Niveau de mortalité : 3 pts

- La mortalité de la génération 1999 est supérieure pour le pays B que pour le pays A, à tous les âges.
- Pour les deux pays les quotients de mortalité sont forts pour la classe d'âges 0-4 ans, due à la mortalité infantile (0-1 an) qui est comprise dans cette classe d'âges. Les quotients de mortalité diminuent pour la classe d'âges 5-9 ans, et augmentent ensuite à peu près régulièrement jusqu'à atteindre 100 % pour la dernière classe d'âges (90-99 ans) où les générations 1999 s'éteignent.
- On constate que pour le pays A le quotient de mortalité devient supérieur à celui de la première classe d'âges (0-4 ans) entre 40 et 50 ans. Alors que pour le pays B c'est seulement à partir de la classe d'âges 50-59 ans. La mortalité infantile est donc beaucoup plus forte dans le pays B que dans le pays A.
- L'espérance de vie à la naissance est bien supérieure dans le pays A que dans le pays B, 75,66 ans contre 56,31 ans. On vit donc plus vieux dans le pays A que dans le pays B.
- La probabilité de survivre jusqu'à 10 ans de la génération 1999 dans le pays A est de 98,60 % contre 86,15 % dans le pays B.
- La probabilité de survivre entre 20 et 50 ans est de 96,46 % contre (1-0,1734) 82,66 %.
- L'espérance de vie à 60 ans dans le pays A est de 19,67 ans, et il est de 15,44 ans dans le pays B.
- Tous les calculs que nous avons fait montrent que le pays A a une mortalité inférieure à celle du pays B. Toutefois on constate que pour les personnes qui ont survécus jusqu'à 60 l'écart de mortalité entre les 2 pays diminue, l'écart entre les espérances de vie à 60 ans est de 4,23 ans contre 19,35 ans à la naissance.